Ecuaciones Funcionales

Nicolás López Funes

1 Definiciones

Dados dos conjuntos A yB, se dice que una función $f : A \to B$ es:

- Sobreyectiva: si dado un elemento $y \in B$ existe al menos un elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$.
- Inyectiva si verifica que $f(x) = f(y) \iff x = y$.
- Biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.
- Periódica si para todo $x \in A$ se cumple que $f(x + t) = f(x)$ para algún t. Se dice que t es un periodo de la función.

2 Ecuación funcional de Cauchy

Encontremos todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tales que

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Solución. Con $x, y = 0$ deducimos que $f(0) = 0$. Ahora, si sustituimos $y = -x$, tenemos que $f(x) = -f(-x)$, y por tanto nos bastará resolverla en los raciones positivos y quedará completamente definida.

Parece ser que $f(nx) = nf(x)$ para todo n natural. Procederemos por inducción: Tenemos caso base, pues claramente, $f(1 \cdot x) = 1 \cdot f(x)$. Asumimos que se cumple para $n \in \mathbb{N}$, entonces con $y = nx$ tenemos que $f((n + 1)x) = (n + 1)f(x)$, quedando demostrado.

Sustituimos ahora $x = \dfrac{p}{q}$, $n = q$ con $p, q \in \mathbb{Z}\backslash 0$, obteniendo $f(xn) = nf(x) = f(p) = pf(1) = qf\left(\dfrac{p}{q}\right)$, de donde $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{p}{q}f(1)$, y si llamamos a a $f(1)$ vemos que la solución es $f(x) = ax$.

Comprobando en la ecuación original vemos que se cumple para cualquier valor de $f(1) = a$,pues $a(x + y) = ax + ay$.

3 Problemas

Problema 1. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que para cualesquiera x, y enteros se verifica:

$$f(x + f(y)) = f(x) - y.$$

Problema 2. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x + f(x + y)) = f(2x) + y$$

para cualesquiera x, y reales.

Problema 3. Halla todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x)f(y) + f(x + y) = xy$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 4. Demuestra que no existe ninguna función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumpla: $f(f(n)) = n + 1$.

Problema 5. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$f(x)f(y) + f\left(\frac{\lambda}{x}\right) f\left(\frac{\lambda}{y}\right) = 2f(xy)$$

para todo par de números reales x e y positivos, siendo λ un número real positivo tal que $f(\lambda) = 1$.

Problema 6. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ tales que para todo $x, y \in \mathbb{Z}^+$ se verifica que $f(x + |f(y)|) = x + f(y)$.

Problema 7. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 8. Halla todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para todo $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(x - 2)f(y) + f(y + 2f(x)) = f(x + yf(x)).$$

Problema 9. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 10. Encuentra las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 11. Determina todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que satisfacen

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$$

para todo $x, y \in \mathbb{Z}$.

Problema 12. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x^3) + f(y^3) = (x + y)(f(x^2) + f(y^2) - f(xy))$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 13. Sea $\mathbb{Q}_{>0}$ el conjunto de los números racionales mayores que cero. Sea $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ una función que satisface las tres siguientes condiciones:

(i) $f(x)f(y) \geq f(xy)$ para todos los $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;

(ii) $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$ para todos los $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;

(iii) existe un número racional $a > 1$ tal que $f(a) = a$.

Demostrar que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Problema 14. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ satisfacen

$$f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = (y + f(x))(x + f(y)).$$